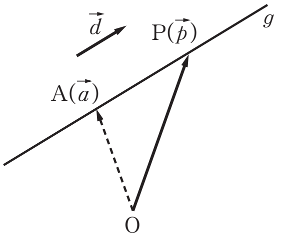
第 43 講　平面ベクトル(5)

【基礎確認事項】

［１］　直線のベクトル方程式

直線の方程式は，通る１点と傾きがわかればただ１つに決まる．これをベクトルで表現することを考える．

□点 A$(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線 g 上の点 P$(\vec{p})$ は，



$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$　……①　（t は実数）

と表すことができる．

①の t がすべての実数をとるとき，点 P$(\vec{p})$ の描く軌跡は直線 g 全体になる．

この①を直線 g の**ベクトル方程式**といい，実数 t を**媒介変数**，$\vec{d}$ を直線 g の**方向ベクトル**という．

□ここで２点 A，P の座標を A$(x_1,\ y_1)$，P$(x,\ y)$ とし，ベクトル $\vec{d}=(l,\ m)$ とする．①を成分で表してみよう．$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{p}=(x,\ y)$ より

$(x,\ y)=(x_1,\ y_1)+t(l,\ m)$

となる．よって，直線 g の方程式は

$$\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \end{cases} \quad \cdots\cdots②$$

と表すことができる．この②を直線 g の**媒介変数表示**という．

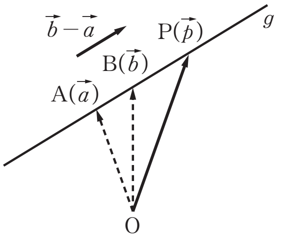
さらに $l\neq 0$ のとき，②から媒介変数 t を消去し整理すると

$$y=\frac{m}{l}(x-x_1)+y_1 \quad \cdots\cdots③$$

となる．この③は，A$(x_1,\ y_1)$ を通る，傾き $\dfrac{m}{l}$ の直線の方程式を表す．一方，方向ベクトル $\vec{d}=(l,\ m)$ は $l=0$ をとりうることに注目したい．$l=0$ のときは，②は直線 $x=x_1$ を表す．

⇒　C&U ①

□２点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線 g のベクトル方程式は，その方向ベクトルが $\vec{b}-\vec{a}$ であることから，①より



$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$　つまり　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

と表される．これは点 P が線分 AB を $t:1-t$ に内分，または外分する点であることを表している．

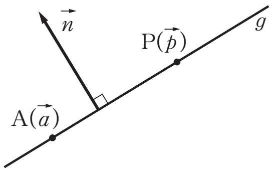
さらに，$1-t=s$ とおくと

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$　（s，t は実数）

と表すことができる．

⇒　C&U ②

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



□点 A($\vec{a}$) を通り，ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線 g のベクトル方程式は，

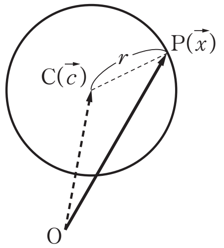
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$　より　$\boxed{\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0}$　……④

と表される．ここで点 A，P の座標を A(x_1，y_1)，P(x，y) とし，
ベクトル $\vec{n}=(a,\ b)$ とすると，$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1,\ y-y_1)$ より
④から　$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$　つまり　$ax+by-(ax_1+by_1)=0$　と表される．
よって次のことが言える．

直線 $ax+by+c=0$ はベクトル $(a,\ b)$ に垂直である．

⇒　C&U ３

［２］ 円のベクトル方程式



□点 C($\vec{c}$) を中心とし，半径を r とする円の方程式は，円周上のどんな点 P($\vec{p}$) に対しても　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$ であることから

$\boxed{|\vec{p}-\vec{c}|=r}$　と表される．

このことから $|\vec{p}-\vec{c}|^2=r^2$　より　$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$
と表される．

⇒　C&U ４

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1　点 A(3, 4) を通り，ベクトル $\vec{d}=(3,\ -1)$ に平行な直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ.

2　2 点 A(1, 2)，B(−1, 3) を通る直線の方程式を媒介変数 t を用いて表せ.

3　点 A(6, −3) を通り，$\vec{n}=(-1,\ 2)$ に垂直な直線の方程式を求めよ.

4　平面上の △OAB と任意の点 P に対し，$|5\overrightarrow{\mathrm{OP}}-3\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$ は円を表す．どのような円かを答えよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 43 講　平面ベクトル(5)

1　(1)　点 A$(-2,\ 1)$ を通り，直線 $3x-5y+4=0$ に平行な直線，垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ．

(2)　法線ベクトルを利用し，2 直線 $3x+y+6=0$ と $x+2y-5=0$ のなす鋭角を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) 2点A(3, 0), B(1, 4)を直径の両端とする円の方程式をベクトルを利用して求めよ.

(2) △OABにおいて, $|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=2$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$とする. 点Aで直線OAに接する円の中心Cが∠AOBの二等分線g上にある. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおくとき, $\vec{c}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$で表せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　△OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　とする．実数 s，t が次の条件を満たすとき，点 P はそれぞれどのような図形を描くか．O，A，B を適当にとって図示せよ．

(1)　$\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{3}=1$

(2)　$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$，$1\leqq s+t\leqq 2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第43講　平面ベクトル(5)

点 A(4, 5) から直線 l : $x+2y-6=0$ に垂線を引き, l との交点を H とする. このとき, 点 H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めたい.

直線 l の法線ベクトルの1つを $\vec{n}=(1,$ [ア] $)$, H の座標を H$(s,\ t)$ とおく. $\vec{n}\parallel\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ より, 実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$ と表せる. よって $s=k+$ [イ], $t=2k+$ [ウ] である.

点 H は l 上の点より, $k=-\dfrac{[エ]}{[オ]}$ である. したがって H$\left(\dfrac{[カキ]}{[ク]},\ \dfrac{[ケ]}{[ク]}\right)$ であり, AH の長さは $\dfrac{[コ]}{\sqrt{[サ]}}$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 43 講　平面ベクトル(5)

【CHECK & UP】

1　求める直線上の点の座標を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d}$　より　$(x,\ y)=(3,\ 4)+t(3,\ -1)$

よって $\begin{cases} \boldsymbol{x=3+3t} \\ \boldsymbol{y=4-t} \end{cases}$　（t は媒介変数）

媒介変数表示に変形し，さらに媒介変数を消去してしまう方法は，ダイレクトに直線の方程式を作るより遠回りになりあまり意味がないように思えるかもしれない．直線のベクトル方程式の概念，および媒介変数表示は，空間ベクトルになったときに真価を発揮するため，それまでに練習を積んでおくこと．

2　求める直線上の点の座標を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　より　$(x,\ y)=(1,\ 2)+t(-2,\ 1)$

よって $\begin{cases} \boldsymbol{x=1-2t} \\ \boldsymbol{y=2+t} \end{cases}$　（t は媒介変数）

【別解】

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　より

$(x,\ y)=(1-t)(1,\ 2)+t(-1,\ 3)=(1-t,\ 2-2t)+(-t,\ 3t)=(1-2t,\ 2+t)$

よって $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+t \end{cases}$　（t は媒介変数）

3　求める直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-6,\ y+3)$　より　$-1(x-6)+2(y+3)=0$

よって求める方程式は　$\boldsymbol{x-2y-12=0}$

【別解】

$\vec{n}=(-1,\ 2)$ に垂直な直線の方程式は

$-x+2y+c=0$　とおける．

これが $(6,\ -3)$ を通るので，

$-(x-6)+2(y+3)=0$　である．

したがって求める方程式は　$x-2y-12=0$

垂直というキーワードから思い浮かべるのは，図形と方程式の分野においては「2 直線の傾きの積が -1」であり，ベクトル分野においては「内積が 0」である．ベクトル方程式はある条件を満たす点 $(x,\ y)$ の集合，すなわち「軌跡」の考えに基づいている．
別解は，内積 $=0$ の考え方から発展し，直線の式における x および y の係数が決定することと，通る点を代入すると式が成立するような変形を施したものである．

4　$|5\overrightarrow{\mathrm{OP}}-3\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$　より

$$\left|5\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}\right)\right|=5$$

$$5\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}\right|=5$$

よって　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}\right|=1$

よって，**辺 AB を 2：3 に内分する点を中心とする半径 1 の円**を表す．

ここでは円のベクトル方程式から中心と半径を導く練習を行ってもらった．
円を表すベクトル方程式は，円の性質を使うことで他にも導く方法がある．とくに「半円の弧に対する円周角は 90°」であることは注目しておきたい．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第43講　平面ベクトル(5)

1 (1) 点A$(-2,\ 1)$を通り，直線$3x-5y+4=0$に平行な直線，垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ．

(2) 法線ベクトルを利用し，2直線$3x+y+6=0$と$x+2y-5=0$のなす鋭角を求めよ．

(1) 直線l：$3x-5y+4=0$の法線ベクトルを$\vec{n}$とすると，$\vec{n}=(3,\ -5)$である．

直線lと平行な直線について

その法線ベクトルは$\vec{n}$であり，A$(-2,\ 1)$を通る

よってその方程式は　$3(x+2)-5(y-1)=0$　つまり　$\boldsymbol{3x-5y+11=0}$

直線lと垂直な直線について

その方向ベクトルは　$\vec{n}$である．法線ベクトルを$\vec{m}=(a,\ b)$とおくと，

$\vec{m}\cdot\vec{n}=0$より　$3a-5b=0$　よって　$b=\dfrac{3}{5}a$

したがって　$\vec{m}=\left(a,\ \dfrac{3}{5}a\right)=\dfrac{a}{5}(5,\ 3)$　より，

求める直線の法線ベクトルの1つは$(5,\ 3)$であり，A$(-2,\ 1)$を通る

ゆえにその方程式は　$5(x+2)+3(y-1)=0$　つまり　$\boldsymbol{5x+3y+7=0}$

(2) 2直線$3x+y+6=0$，$x+2y-5=0$の法線ベクトルは

それぞれ　$\vec{n}=(3,\ 1)$，$\vec{m}=(1,\ 2)$とおける．

$\vec{n}$と$\vec{m}$のなす角をθ（$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$）とすると

$|\vec{n}|=\sqrt{10}$，$|\vec{m}|=\sqrt{5}$，$\vec{n}\cdot\vec{m}=3+2=5$　より

$\cos\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　よって　$\theta=45^\circ$

したがって，2直線のなす角は　$\boldsymbol{45^\circ}$

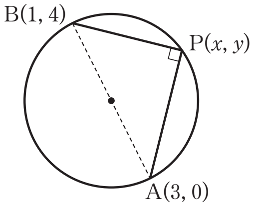
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　(1)　2 点 A(3, 0)，B(1, 4) を直径の両端とする円の方程式をベクトルを利用して求めよ．

(2)　△OAB において，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$ とする．点 A で直線 OA に接する円の中心 C が ∠AOB の二等分線 g 上にある．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(1)　求める円の円周上の点を P$(x,\ y)$ とすると，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$　すなわち　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$



$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y)$，$\overrightarrow{BP}=(x-1,\ y-4)$ より

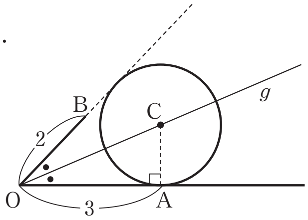
$(x-3)(x-1)+y(y-4)=0$　　$x^2-4x+y^2-4y+3=0$

したがって　$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-2)^2=5}$

(2)　点 C は ∠AOB の二等分線上にあるので

$$\vec{c}=k\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=k\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{2}\right)=\frac{k}{6}(2\vec{a}+3\vec{b})$$ （k は実数）とおける．

ここで　$\dfrac{k}{6}=t$ とおくと，$\vec{c}=t(2\vec{a}+3\vec{b})$　（t は実数）とおける．



ここで，CA⊥OA であることより　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

つまり　$(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

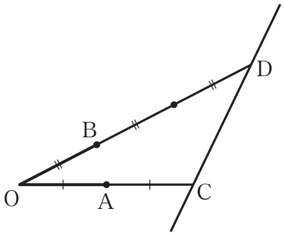
$\{\vec{a}-(2t\vec{a}+3t\vec{b})\}\cdot\vec{a}=0$　　$|\vec{a}|^2-2t|\vec{a}|^2-3t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$9-18t-12t=0$　　$t=\dfrac{3}{10}$　　したがって　$\boldsymbol{\vec{c}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{9}{10}\vec{b}}$

3　△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　とする．実数 s，t が次の条件を満たすとき，点 P はそれぞれどのような図形を描くか．O，A，B を適当にとって図示せよ．

(1)　$\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{3}=1$　　(2)　$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$，$1\leqq s+t\leqq 2$

(1)　$\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{3}=1$　であり



$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\dfrac{s}{2}(2\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{3}(3\overrightarrow{OB})$

よって，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすると，

点 P は**直線 CD 上を動く**．

(2)　$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ とする．

点 P の存在範囲は平行四辺形 OACB の周および内部に限られる．

$s+t=k$　とおくと，$1\leqq k\leqq 2$

また，$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$，$\dfrac{s}{k}\geqq 0$，$\dfrac{t}{k}\geqq 0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{t}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$　より

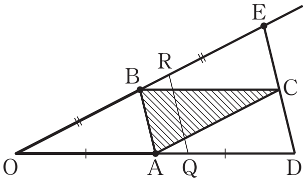
$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし，k を固定すると

点 P は辺 AB と平行な線分 QR 上を動く．

$1\leqq k\leqq 2$ の範囲で k を動かすことにより，

$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ とすると，点 P の存在範囲は

△ABC の周および内部である．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 43 講　平面ベクトル(5)

点 A(4, 5) から直線 l : $x+2y-6=0$ に垂線を引き, l との交点を H とする. このとき, 点 H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めたい.

直線 l の法線ベクトルの 1 つを $\vec{n}=(1,\ \boxed{ア})$, H の座標を H$(s,\ t)$ とおく. $\vec{n}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ より, 実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$ と表せる. よって $s=k+\boxed{イ}$, $t=2k+\boxed{ウ}$ である.

点 H は l 上の点より, $k=-\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である. したがって H$\left(\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}},\ \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{ク}}\right)$ であり, AH の長さは $\dfrac{\boxed{コ}}{\sqrt{\boxed{サ}}}$ である.

直線 l : $x+2y-6=0$ の法線ベクトルの 1 つは　$\vec{n}=(1,\ \mathbf{2})$ である.

H の座標を H$(s,\ t)$ とおくと, $\vec{n}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}$　より

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$　より　$(s-4,\ t-5)=k(1,\ 2)$

よって　$s-4=k$, $t-5=2k$　より　$s=k+\mathbf{4}$, $t=2k+\mathbf{5}$

また, 点 H は l 上の点より, $s+2t-6=0$

したがって　$(k+4)+2(2k+5)-6=0$　　したがって　$k=-\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}$

$s=\dfrac{12}{5}$, $t=\dfrac{9}{5}$　より　H$\left(\dfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{9}}{5}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=-\dfrac{8}{5}\vec{n}=-\dfrac{8}{5}(1,\ 2)$　より　$\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\dfrac{8}{5}\sqrt{1+4}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\mathbf{8}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。